Racines carrées d'un nombre complexe

$$z^2 = a + ib$$

Exemple d'application de la recherche de FORMAV au domaine de l'e-learning :
Création d'un support de cours animé à destination de l'enseignant

FORMAV

martine.arrou-vignod@formav.fr

Votre partenaire formation
01.47.09.22.75

Entrée

Cliquer sur les liens du plan ou de la barre du haut pour accéder à l'item souhaité

suite

Ce document sous forme d'animation est à destination de l'enseignant pour une utilisation en présentiel

- L'enseignant pourra développer l'animation au rythme de son discours [1]
- Ce document est à ouvrir de préférence avec TeXworks [2]

Ce document n'est pas à l'usage de l'apprenant qui a à sa disposition

- des vidéos avec commentaires sur l'organigramme
  - méthode
  - exercice n°1
  - exercice n°2
  - exercice n°3
- un module d'e-learning dans lequel les vidéos sont intégrées
  - e-learning
- des exercices corrigés à données tirées aléatoirement
  - exercices

Méthode avec animation | Méthode sans animation

1. en utilisant la molette de la souris, les flèches du clavier ou les flèches du didacticiel
2. Le rendu avec Acrobat Reader est moins bon et il n'y a pas de loupe disponible

Déterminer les racines carrées de $Z = a + ib$

Utiliser la molette de la souris,les flèches ci-dessous ou les flèches du clavier pour développer l'animation

Méthode sans animation

Déterminer les racines carrées de $Z = a + ib$ équivaut à trouver nombres complexes $z = x + iy$

Utiliser la molette de la souris,les flèches ci-dessous ou les flèches du clavier pour développer l'animation

Méthode sans animation

Déterminer les racines carrées de $Z = a + ib$ équivaut à trouver nombres complexes $z = x + iy$ qui vérifient $z^2 = Z$

Utiliser la molette de la souris,les flèches ci-dessous ou les flèches du clavier pour développer l'animation

Méthode sans animation

Déterminer les racines carrées de $Z = a + ib$ équivaut à trouver nombres complexes $z = x + iy$ qui vérifient $z^2 = Z$

$$z^2 = Z$$

Utiliser la molette de la souris,les flèches ci-dessous ou les flèches du clavier pour développer l'animation

Méthode sans animation

Déterminer les racines carrées de $Z = a + ib$ équivaut à trouver nombres complexes $z = x + iy$ qui vérifient $z^2 = Z$

$$z^2 = Z \iff$$

Utiliser la molette de la souris,les flèches ci-dessous ou les flèches du clavier pour développer l'animation

Méthode sans animation

Déterminer les racines carrées de $Z = a + ib$ équivaut à trouver nombres complexes $z = x + iy$ qui vérifient $z^2 = Z$

$$z^2 = Z \iff (x + iy)^2 = a + ib$$

Utiliser la molette de la souris,les flèches ci-dessous ou les flèches du clavier pour développer l'animation

Méthode sans animation

Déterminer les racines carrées de $Z = a + ib$ équivaut à trouver nombres complexes $z = x + iy$ qui vérifient $z^2 = Z$

$$z^2 = Z \iff (x + iy)^2 = a + ib \iff$$

Utiliser la molette de la souris,les flèches ci-dessous ou les flèches du clavier pour développer l'animation

Méthode sans animation

Déterminer les racines carrées de $Z = a + ib$ équivaut à trouver nombres complexes $z = x + iy$ qui vérifient $z^2 = Z$

$$z^2 = Z \iff (x + iy)^2 = a + ib \iff x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib$$

Utiliser la molette de la souris,les flèches ci-dessous ou les flèches du clavier pour développer l'animation

Méthode sans animation

Déterminer les racines carrées de $Z = a + ib$ équivaut à trouver nombres complexes $z = x + iy$ qui vérifient $z^2 = Z$

$$z^2 = Z \iff (x + iy)^2 = a + ib \iff x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib$$

Ce qui donne

Utiliser la molette de la souris,les flèches ci-dessous ou les flèches du clavier pour développer l'animation

Méthode sans animation

Déterminer les racines carrées de $Z = a + ib$ équivaut à trouver nombres complexes $z = x + iy$ qui vérifient $z^2 = Z$

$$z^2 = Z \iff (x+iy)^2 = a + ib \iff x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib$$

Ce qui donne $\left\{ \begin{array}{c} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{array} \right.$

Utiliser la molette de la souris,les flèches ci-dessous ou les flèches du clavier pour développer l'animation

Méthode sans animation

Déterminer les racines carrées de $Z = a + ib$ équivaut à trouver nombres complexes $z = x + iy$ qui vérifient $z^2 = Z$

$$z^2 = Z \iff (x + iy)^2 = a + ib \iff x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib$$

Ce qui donne $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$

On écrit l'égalité des modules $|z^2| = |Z|$

Utiliser la molette de la souris,les flèches ci-dessous ou les flèches du clavier pour développer l'animation

Méthode sans animation

Déterminer les racines carrées de $Z = a + ib$ équivaut à trouver nombres complexes $z = x + iy$ qui vérifient $z^2 = Z$

$$z^2 = Z \Longleftrightarrow (x + iy)^2 = a + ib \Longleftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib$$

Ce qui donne $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$

On écrit l'égalité des modules $|z^2| = |Z| \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$

Utiliser la molette de la souris,les flèches ci-dessous ou les flèches du clavier pour développer l'animation

Méthode sans animation

Déterminer les racines carrées de $Z = a + ib$ équivaut à trouver nombres complexes $z = x + iy$ qui vérifient $z^2 = Z$

$$z^2 = Z \iff (x + iy)^2 = a + ib \iff x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib$$

Ce qui donne $\left\{ \begin{array}{r} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{array} \right.$

On écrit l'égalité des modules $|z^2| = |Z| \iff x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$

On obtient le système

Utiliser la molette de la souris,les flèches ci-dessous ou les flèches du clavier pour développer l'animation

Méthode sans animation

Déterminer les racines carrées de $Z = a + ib$ équivaut à trouver nombres complexes $z = x + iy$ qui vérifient $z^2 = Z$

$$z^2 = Z \iff (x + iy)^2 = a + ib \iff x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib$$

Ce qui donne $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$

On écrit l'égalité des modules $|z^2| = |Z| \iff x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$

On obtient le système $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \qquad (S1)$

Utiliser la molette de la souris,les flèches ci-dessous ou les flèches du clavier pour développer l'animation

Méthode sans animation

$$\begin{cases} z^2 = Z \\ |z|^2 = |Z| \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & (3) \end{cases} \quad (S1)$$

Utiliser la molette de la souris,les flèches ci-dessous ou les flèches du clavier pour développer l'animation

Méthode sans animation

$$\left\{\begin{array}{l} z^2 = Z \\ |z|^2 = |Z| \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & (3) \end{array}\right. \quad (S1)$$

On résout le système $(S1)$ par combinaison

Utiliser la molette de la souris,les flèches ci-dessous ou les flèches du clavier pour développer l'animation

Méthode sans animation

$$\begin{cases} z^2 = Z \\ |z|^2 = |Z| \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & (3) \end{cases} \quad (S1)$$

On résout le système $(S1)$ par combinaison

$$\begin{cases} 2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2} & (1) + (3) \\ 2y^2 = -a + \sqrt{a^2 + b^2} & -(1) + (3) \\ 2xy = b & (2) \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} z^2 = Z \\ |z|^2 = |Z| \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} & (3) \end{array}\right. \quad (S1)$$

On résout le système $(S1)$ par combinaison

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x^2 = a + \sqrt{a^2+b^2} & (1)+(3) \\ 2y^2 = -a + \sqrt{a^2+b^2} & -(1)+(3) \\ 2xy = b & (2) \end{array}\right. \iff$$

Utiliser la molette de la souris,les flèches ci-dessous ou les flèches du clavier pour développer l'animation

Méthode sans animation

$$\left\{\begin{array}{l} z^2 = Z \\ |z|^2 = |Z| \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} & (3) \end{array}\right. \quad (S1)$$

On résout le système $(S1)$ par combinaison

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x^2 = a + \sqrt{a^2+b^2} & (1)+(3) \\ 2y^2 = -a + \sqrt{a^2+b^2} & -(1)+(3) \\ 2xy = b & (2) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}} \\ y = \pm\dfrac{\sqrt{-a+\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}} \\ 2xy = b \end{array}\right.$$

Utiliser la molette de la souris,les flèches ci-dessous ou les flèches du clavier pour développer l'animation

Méthode sans animation

$$\left\{\begin{array}{l} z^2 = Z \\ |z|^2 = |Z| \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} & (3) \end{array}\right. \quad (S1)$$

On résout le système $(S1)$ par combinaison

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x^2 = a + \sqrt{a^2+b^2} & (1)+(3) \\ 2y^2 = -a + \sqrt{a^2+b^2} & -(1)+(3) \\ 2xy = b & (2) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}} \\ y = \pm\dfrac{\sqrt{-a+\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}} \\ 2xy = b \end{array}\right.$$

l'équation (2) permet de déterminer les signes de x et y

Utiliser la molette de la souris,les flèches ci-dessous ou les flèches du clavier pour développer l'animation

Méthode sans animation

$$\begin{cases} z^2 = Z \\ |z|^2 = |Z| \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & (3) \end{cases} \quad (S1)$$

On résout le système $(S1)$ par combinaison

$$\begin{cases} 2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2} & (1) + (3) \\ 2y^2 = -a + \sqrt{a^2 + b^2} & -(1) + (3) \\ 2xy = b & (2) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm \dfrac{\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}} \\ y = \pm \dfrac{\sqrt{-a+\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}} \\ 2xy = b \end{cases}$$

l'équation (2) permet de déterminer les signes de x et y

$b > 0 \Rightarrow$ x et y sont de même signe

Utiliser la molette de la souris,les flèches ci-dessous ou les flèches du clavier pour développer l'animation

Méthode sans animation

$$\left\{\begin{array}{l} z^2 = Z \\ |z|^2 = |Z| \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & (3) \end{array}\right. \quad (S1)$$

On résout le système $(S1)$ par combinaison

$$\left\{\begin{array}{lc} 2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2} & (1) + (3) \\ 2y^2 = -a + \sqrt{a^2 + b^2} & -(1) + (3) \\ 2xy = b & (2) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = \pm \dfrac{\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}} \\ y = \pm \dfrac{\sqrt{-a+\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}} \\ 2xy = b \end{array}\right.$$

l'équation (2) permet de déterminer les signes de x et y

$b > 0 \Rightarrow$ x et y sont de même signe

$$z_1 = \frac{\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}} + i\,\frac{\sqrt{-a+\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}} \qquad z_2 = -z_1$$

Utiliser la molette de la souris,les flèches ci-dessous ou les flèches du clavier pour développer l'animation

Méthode sans animation

$$\begin{cases} z^2 = Z \\ |z|^2 = |Z| \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} & (3) \end{cases} \quad (S1)$$

On résout le système $(S1)$ par combinaison

$$\begin{cases} 2x^2 = a + \sqrt{a^2+b^2} & (1)+(3) \\ 2y^2 = -a + \sqrt{a^2+b^2} & -(1)+(3) \\ 2xy = b & (2) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm \dfrac{\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}} \\ y = \pm \dfrac{\sqrt{-a+\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}} \\ 2xy = b \end{cases}$$

l'équation (2) permet de déterminer les signes de x et y

$b > 0 \Rightarrow$ x et y sont de même signe

$$z_1 = \frac{\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}} + i\,\frac{\sqrt{-a+\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}} \qquad z_2 = -z_1$$

$b < 0 \Rightarrow$ x et y sont de signe contraire

Utiliser la molette de la souris,les flèches ci-dessous ou les flèches du clavier pour développer l'animation

Méthode sans animation

$$\left\{\begin{array}{l} z^2 = Z \\ |z|^2 = |Z| \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} & (3) \end{array}\right. \quad (S1)$$

On résout le système $(S1)$ par combinaison

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x^2 = a + \sqrt{a^2+b^2} & (1)+(3) \\ 2y^2 = -a + \sqrt{a^2+b^2} & -(1)+(3) \\ 2xy = b & (2) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}} \\ y = \pm\dfrac{\sqrt{-a+\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}} \\ 2xy = b \end{array}\right.$$

l'équation (2) permet de déterminer les signes de x et y

$b > 0 \Rightarrow$ x et y sont de même signe

$$z_1 = \frac{\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}} + i\,\frac{\sqrt{-a+\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}} \qquad z_2 = -z_1$$

$b < 0 \Rightarrow$ x et y sont de signe contraire

$$z_1 = -\frac{\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}} + i\,\frac{\sqrt{-a+\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}} \qquad z_2 = -z_1$$

Utiliser la molette de la souris,les flèches ci-dessous ou les flèches du clavier pour développer l'animation

Méthode sans animation

$$\left\{\begin{array}{l} z^2 = Z \\ |z|^2 = |Z| \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & (3) \end{array}\right. \quad (S1)$$

On résout le système $(S1)$ par combinaison

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2} & (1) + (3) \\ 2y^2 = -a + \sqrt{a^2 + b^2} & -(1) + (3) \\ 2xy = b & (2) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = \pm \dfrac{\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}}{\sqrt{2}} \\ y = \pm \dfrac{\sqrt{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}}{\sqrt{2}} \\ 2xy = b \end{array}\right.$$

l'équation (2) permet de déterminer les signes de x et y

$b > 0 \Rightarrow$ x et y sont de même signe

$$z_1 = \frac{\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}}{\sqrt{2}} \qquad z_2 = -z_1$$

$b < 0 \Rightarrow$ x et y sont de signe contraire

$$z_1 = -\frac{\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}}{\sqrt{2}} \qquad z_2 = -z_1$$

Utiliser la molette de la souris,les flèches ci-dessous ou les flèches du clavier pour développer l'animation

Fin de la méthode

Méthode sans animation

Déterminer les racines carrées de $Z = a + ib$
équivaut à trouver nombres complexes $z = x + iy$ qui vérifient $z^2 = Z$

$$z^2 = Z \Longleftrightarrow (x + iy)^2 = a + ib \Longleftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib$$

Ce qui donne $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$

On écrit l'égalité des modules $|z^2| = |Z| \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$

On obtient le système $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \qquad (S1)$

$$\begin{cases} z^2 = Z \\ |z|^2 = |Z| \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & (3) \end{cases} \quad (S1)$$

On résout le système $(S1)$ par combinaison

$$\begin{cases} 2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2} & (1) + (3) \\ 2y^2 = -a + \sqrt{a^2 + b^2} & -(1) + (3) \\ 2xy = b & (2) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm \dfrac{\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}} \\ y = \pm \dfrac{\sqrt{-a+\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}} \\ 2xy = b \end{cases}$$

l'équation (2) permet de déterminer les signes de x et y

$b > 0 \Rightarrow$ x et y sont de même signe

$$z_1 = \frac{\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}} + i\,\frac{\sqrt{-a+\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}} \qquad z_2 = -z_1$$

$b < 0 \Rightarrow$ x et y sont de signe contraire

$$z_1 = -\frac{\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}} + i\,\frac{\sqrt{-a+\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}} \qquad z_2 = -z_1$$